§ 2. Интегралдаудың негізгі әдістері

Анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі

Теорема. $x=\varphi(t):<\alpha,\beta>\to<a,b>$ функциясы $<\alpha,\beta>$ аралығында дифференциалдансын, $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының $<a,b>$ аралығындағы алғашқы бейнесі болсын, яғни

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

онда $\forall t\in<\alpha,\beta>$ аралығында $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функциясы үшін

$F(\varphi(t))$ алғашқы функциясы табылады, яғни

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C\,.$$

$x=\varphi(t)$ алмастыруын дұрыс таңдау қарапайым функцияны интегралдауға әкеледі, бірақ нәтижесінде жауапты x айнымалысы арқылы өрнектеу қажет: $t=\varphi^{-1}(x)$.

Мысал 1. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\cdot dx=$

интеграл астындағы функцияны иррационалдықтан құтылдыру үшін

$\sqrt[3]{1-x}$ ны t арқылы белгілейміз:

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{1-x}=t\Rightarrow 1-x=t^3\\ x=1-t^3:R\to R\\ dx=-3t^2dt\end{array}\right|=-3\int\left(1-t^3\right)^2t\cdot t^2dt=$$

$$=-3\int\left(1-2t^3+t^6\right)t^3dt=-3\int\left(t^3-2t^6+t^9\right)dt=$$

$$=-3\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{10}t^{10}\right)+C=-\frac{3}{140}t^4\left(35-40t^3+14t^6\right)+C=$$

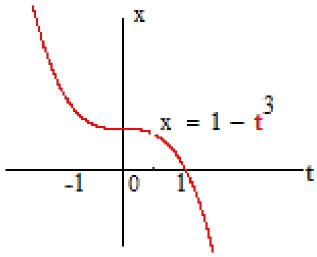
t - нің орнына x- арқылы өрнектелуін қоямыз.

$$-\frac{3}{140}(1-x)^{\frac{4}{3}}\left[35-40(1-x)+14(1-x)^2\right]+C=$$

$$-\frac{3}{140}(1-x)^{\frac{4}{3}}\left(14x^2+12x+9\right)+C.$$

Бұл мысалда $x=\varphi(t)$ функциясы - $x=1-t^3:(-\infty;+\infty)\to(-\infty;+\infty)$

және теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады.



Мысал 2. $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx=$

бұл интегралда алмастыру әдісін қолданамыз:

$1-5x^2=t$ деп алмастырсақ, $xdx=-\frac{1}{10}dt$ теңдігі орындалады. Интеграл астындағы өрнекті жаңа айнымалы арқылы өрнектейміз: $x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx=\frac{1}{50}\left(t^{11}-t^{10}\right)dt,$

сонда интегралдың жауабы:

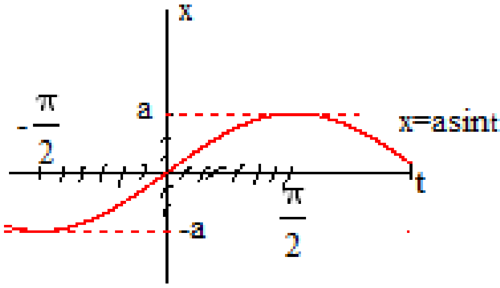
$$\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx=\frac{1}{50}\int\left(t^{11}-t^{10}\right)dt=\frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}\right)+C=-\frac{1+55x^2}{6600}\left(1-5x^2\right)^{11}+C.$$

Мысал 3. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысын табамыз: $a^2-x^2\geq 0\Leftrightarrow x\in[-a;a]$; егер $x=a\sin t$ тригонометриялық алмастыруын қолдансақ, онда интеграл астындағы иррационалдықтан құтыламыз.

$[-a;a]\ni x$ кесіндісін алу үшін $x=a\sin t$ функциясын $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\ni t$ аралығында қарастыру жеткілікті:

$$=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-a;a] \\ dx=a\cos t\,dt \\ t=\arcsin\frac{x}{a}\end{array}\right|=$$



$$=\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}a\cos t dt=$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\left|\cos t\right|,\qquad \forall t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\quad \cos t\geq 0,$$

$$a^2\int\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)+C=$$

$$\sin t=\frac{x}{a},\qquad \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C.$ Нәтижесінде

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

теңдігін аламыз.

Мысал 4. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы $\frac{x}{2a-x}\geq 0$ шартын қанағаттандыру керек. Бұдан $0\leq x\leq 2a$ аламыз. Бұл жағдайда интеграл астындағы функцияның иррационалдығынан құтылу үшін $x=2a\sin^2 t$ тригонометриялық алмастыруын жасаймыз.

$[0;2a)\ni x$ орындалу үшін $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ жартылай кесіндісін қарастырған жеткілікті:

$$=\left|\begin{array}{l} x=2a\sin^2 t:\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\to[0:2a) \\ dx=4a\sin t\cos tdt \\ t=\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} \end{array}\right|=$$

$$=\int 2a\sin^2 t\sqrt{\frac{2a\sin^2 t}{2a(1-\sin^2 t)}}4a\sin t\cos tdt=$$

$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ үшін $\cos t>0$ болғандықтан $|\cos t|=\cos t$:

$$=8a^2\int\sin^3 t\frac{\sin t}{\cos t}\cos tdt=8a^2\int\sin^4 tdt=$$

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha,\quad 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$ формулаларын қолданып, кестедегі интегралдық формулаларды аламыз:

$$=2a^2\int(1-\cos 2t)^2 dt=2a^2\int\left(1-2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=a^2\int(3-4\cos 2t+\cos 4t)dt=$$

$$=3a^2 t-2a^2\sin 2t+\frac{a^2}{4}\sin 4t+C=$$

$$=3a^2 t-4a^2\sin t\cos t+a^2\sin t\cos t\cos 2t+C=$$

t - ның орнына x- арқылы өрнектелуін қоямыз

$$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x}{2a}}=\sqrt{\frac{2a-x}{2a}},$$

$$\cos 2t=2\cos^2 t-1=\frac{2a-}{a}-1=\frac{a-x}{a}:$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-a\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}\left(4-\frac{a-x}{a}\right)+C=$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C\ 7$$

Мысал 5. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx=$

тригонометриялық алмастырулармен бірге гиперболалық тригонометриялық алмастыруларды да қолдануға болады:

$$= \left| \begin{array}{l} x = asht : (-\infty;+\infty) \to (-\infty;+\infty) \\ dx = achtdt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 \left(1 + sh^2 t\right)} achtdt =$$

$$= a^2 \int ch^2 tdt =$$

интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетеміз де, 13 формула бойынша

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + ch2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} sh2t \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} (t + shtcht) + C =$$

$$t = Arcsh \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{a + \frac{x^2}{a^2}} \right) = \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$cht = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{a + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a},$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) - \ln a \right] + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + C =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C.$$

Мысал 6. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$

Алғашқы функцияны табу үшін алмастыру әдісін қолданамыз:

$\sqrt{1 - x^2} = t$ -деп алмастырсақ , онда $\frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = -dt$ теңдігі орындалады.

$$= \int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\int \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = -\left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{15} \left(8 + 4x^2 + 3x^4\right) \sqrt{1 - x^2} + C, \ |x| < 1.$$

Мысал 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}} =$

$t = e^{-\frac{x}{2}}$ жаңа айнымалысын енгіземіз де жаңа айнымалы бойынша интегралдаймыз:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C = x - 2\ln\left(1+\sqrt{e^x+1}\right) + C.$$

Мысал 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} =$

тригонометриялық алмастырулар қолданамыз:

$x = atgt, \;\; a \neq 0$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

Мысал 9. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx. =$

$x = a\cos 2t$ тригонометриялық алмастыруын жасаймыз, сонда $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = ctgt$ теңдігін аламыз. Осы теңдіктен x-ті тауып теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз:

$$dx = -2a\sin 2t dt$$

сонда интеграл:

$$= \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = -4a\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C = a \cdot \arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C, \; -a \leq x < a.$$

Мысал 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =$

$x - a = (b-a)\sin^2 t$ алмастыруын жасаймыз, сонда

$dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt$

орындарына қойсақ, интеграл қарапайым түрге келеді:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C, \;\; a < x < b.$$

Мысал 11. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx =$

$x = asht$ алмастыруын жасаймыз, теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз:

$$dx = achtdt$$

интеграл астындағы функция

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2\left(1+sh^2t\right)} = acht \text{ түрге келеді.}$$

жаңа айнымалы бойынша интегралын табамыз:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = a^2\int ch^2tdt = \frac{a^2}{4}sh2t + \frac{a^2t}{2} + C.$$

$sht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ $e^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. $e^t > 0$ екенін ескеріп

$$t = \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| - \ln a \text{ табамыз, орындарына апарып қойсақ:}$$

$$sh2t = 2shtcht = 2sht\sqrt{1+sh^2t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2},$$

$$= \int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$$

Мысал 12. $\int \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}dx.$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы: $x < -a$ $x \ge a$

Айталық $x \ge a$ болсын,

$x - a = 2ash^2t$ алмастыруын жасаймыз. Теңдіктің екі жағын дифференциалдап, dx-ті табамыз:

$$dx = 4ashtchtdt$$

Сонда интеграл

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = 4a\int sh^2tdt = ash2t - 2at + C.$$

$ash2t = \sqrt{x^2 - a^2}$, $sht = \sqrt{\dfrac{x-a}{2a}} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ теңдіктерін ескеріп, t-ны табамыз:

$$t = \ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right) - \ln\sqrt{2}a$$

орнына апарып қойсақ:

$$= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \sqrt{x^2 - a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right) + C.$$

Енді $x < -a$ болсын. Онда $x + a = -2ash^2t$ алмастыруын жасаймыз. Екі жағын дифференциалдап dx-ті табамыз:

$$dx = -4ashtchtdt$$

Орындарына апарып қойсақ:

$$= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = -4a\int sh^2tdt = -ash2t + 2at + C =$$

$$= -\sqrt{x^2 + a^2} + 2a\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a}\right) + C.$$